Algorithmes qui détectent les facteurs libres et applications

Lambert ROSIQUE

Soutenance orale de Mémoire

12 Juin 2012

Définition

Un **mot primitif** *est un mot qui appartient à une base du groupe*

Définition

Un **mot primitif** *est un mot qui appartient à une base du groupe*

Définition

H est un **facteur libre** *de J si on peut étendre une base de H en une base de J*

Définition

Un **mot primitif** *est un mot qui appartient à une base du groupe*

Définition

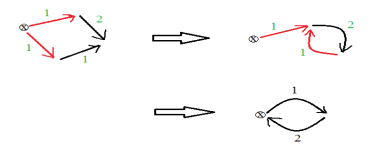
H est un **facteur libre** *de J si on peut étendre une base de H en une base de J*

Définition

Γ est un **core graph** *s'il est connecté, a au moins un sommet et si tout sommet appartient à au moins un cycle réduit*

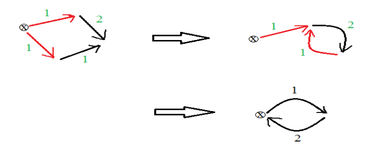
Core-graphs

Stalling's folding



Core-graphs

Stalling's folding



Proposition

Core-graph $\Longleftrightarrow$ *- connecté*

- degré des sommets au moins 2

- 2 j-arêtes ne partagent jamais même origine ou arrivée

Quotients

Définition

Γ_1 **quotient** *de* Γ_2 *s'il existe un morphisme surjectif* $\eta : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$

Quotients

Définition

Γ_1 **quotient** *de* Γ_2 *s'il existe un morphisme surjectif* $\eta : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$

Remarque

quotient ssi il existe une partition P de sommets à "coller"

Quotients

Définition

Γ_1 **quotient** *de* Γ_2 *s'il existe un morphisme surjectif* $\eta : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$

Remarque

quotient ssi il existe une partition P de sommets à "coller"

Définition

quotient immédiat $=$ *on ne colle que 2 sommets*

Quotients

Définition

Γ_1 **quotient** *de* Γ_2 *s'il existe un morphisme surjectif* $\eta : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$

Remarque

quotient ssi il existe une partition P de sommets à "coller"

Définition

quotient immédiat $=$ *on ne colle que 2 sommets*

distance $=$ *chaine minimale de quotients immédiaux pour aller d'un graphe à l'autre*

Théorème

Théorème

Théorème

Théorème

$$\text{Si } H \trianglelefteq J \trianglelefteq F_k \text{ et } H \twoheadrightarrow J \text{ alors}$$

$$\varrho(H, J) = rk(J) - rk(K) \iff H \lessdot J$$

Théorème

Théorème

$$\textit{Si } H \trianglelefteq J \trianglelefteq F_k \textit{ et } H \twoheadrightarrow J \textit{ alors}$$

$$\varrho(H,J) = rk(J) - rk(K) \iff H \lessdot J$$

Preuve

$\Longrightarrow$: *immédiat*

Théorème

Théorème

$$Si\ H \trianglelefteq J \trianglelefteq F_k \ et\ H \twoheadrightarrow J\ alors$$

$$\varrho(H, J) = rk(J) - rk(K) \iff H \lessdot J$$

Preuve

$\Longrightarrow$: *immédiat*

$\Longleftarrow$: *récurrence sur* $t = rk(J) - rk(H)$

Théorème

Théorème

$$Si\ H \trianglelefteq J \trianglelefteq F_k\ et\ H \twoheadrightarrow J\ alors$$

$$\varrho(H, J) = rk(J) - rk(K) \iff H \lessdot J$$

Preuve

$\Longrightarrow$: *immédiat*

$\Longleftarrow$: *récurrence sur* $t = rk(J) - rk(H)$

1) $\underline{Cas\ t = 1}$

Si $J =< H, w >$ *avec* p_w *(resp.* s_w*) plus long préfixe (suffixe) de* w *dans* $\Gamma(H)$ *alors*

Théorème

Théorème

$$Si\ H \trianglelefteq J \trianglelefteq F_k\ et\ H \twoheadrightarrow J\ alors$$

$$\varrho(H,J) = rk(J) - rk(K) \iff H \lessdot J$$

Preuve

$\Longrightarrow$: *immédiat*

$\Longleftarrow$: *récurrence sur* $t = rk(J) - rk(H)$

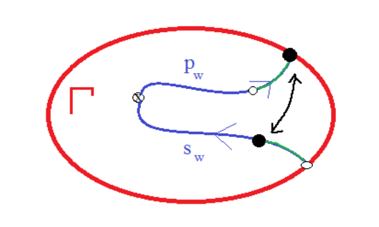
1) *<u>Cas</u>* $\underline{t = 1}$

Si $J = < H, w >$ *avec* p_w *(resp.* s_w*) plus long préfixe (suffixe) de* w *dans* $\Gamma(H)$ *alors*

a) Soit $|p_w| + |s_w| < |w|$

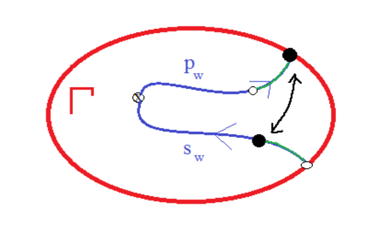
auquel cas H *ne peut pas être un facteur libre*

b) Soit $|p_w| + |s_w| \geq |w|$



et donc $\varrho(H, J) = 1$

b) Soit $|p_w| + |s_w| \geq |w|$



et donc $\varrho(H, J) = 1$

2) Cas $t \geq 2$

Notations : (w_i) base complémentaire de H sur J

$J_i = < H, w_1, ..., w_i >$

Γ_i core graph de J_i

p_i, s_i plus longs préfixes/suffixes de w_i dans Γ_{i-1}

$h(\Gamma_{i-1}, w_i) = max\{0, |w_i| - |p_i| - |s_i|\}$

Remarquons qu'alors Γ_i quotient immédiat de Γ_{i-1} ssi $h(\Gamma_{i-1}, w_i) = 0$.

Remarquons qu'alors Γ_i quotient immédiat de Γ_{i-1} ssi $h(\Gamma_{i-1}, w_i) = 0$.

a) $\forall i, h(\Gamma_{i-1}, w_i) > 0$

alors Γ sous-graphe propre de Δ

Remarquons qu'alors Γ_i quotient immédiat de Γ_{i-1} ssi $h(\Gamma_{i-1}, w_i) = 0$.

a) $\forall i, h(\Gamma_{i-1}, w_i) > 0$
alors Γ sous-graphe propre de Δ

b) $h(\Gamma_0, w_1) = 0$
alors $\varrho(H, J_1) = 1$ et par récurrence $\varrho(H, J) = t$

Remarquons qu'alors Γ_i quotient immédiat de Γ_{i-1} ssi $h(\Gamma_{i-1}, w_i) = 0$.

a) $\forall i, h(\Gamma_{i-1}, w_i) > 0$
alors Γ sous-graphe propre de Δ

b) $h(\Gamma_0, w_1) = 0$
alors $\varrho(H, J_1) = 1$ et par récurrence $\varrho(H, J) = t$

c) $h(\Gamma_{i-2}, w_{i-1}) > 0$ et $h(\Gamma_{i-1}, w_i) = 0$
On distingue 3 sous-cas :

α. Si $u, v \in V(\Gamma_{i-2})$ alors $h(\Gamma_{i-2}, w_i) = 0$: on peut donc échanger w_i et w_{i-1} pour réduire la suite

α. Si $u, v \in V(\Gamma_{i-2})$ alors $h(\Gamma_{i-2}, w_i) = 0$: on peut donc échanger w_i et w_{i-1} pour réduire la suite

β. Si $v \in V(\Gamma_{i-2})$ mais $u \in V(\Gamma_{i-1})$, $u \notin V(\Gamma_{i-2})$ alors l'hanse nécessaire pour ajouter w_i à Γ_{i-2} est plus petite que $h(\Gamma_{i-2}, w_{i-1})$

α. Si $u, v \in V(\Gamma_{i-2})$ alors $h(\Gamma_{i-2}, w_i) = 0$: on peut donc échanger w_i et w_{i-1} pour réduire la suite

β. Si $v \in V(\Gamma_{i-2})$ mais $u \in V(\Gamma_{i-1})$, $u \notin V(\Gamma_{i-2})$ alors l'hanse nécessaire pour ajouter w_i à Γ_{i-2} est plus petite que $h(\Gamma_{i-2}, w_{i-1})$

γ. Si u, v sont dans $V(\Gamma_{i-1})$ mais pas dans $V(\Gamma_{i-2})$ Alors $h(\Gamma_{i-2}, w_i) < h(\Gamma_{i-2}, w_{i-1})$

Ceci achève la démonstration du théorème.

Algorithme de Puder

Proposition

Algorithme de Puder

Proposition

Soient $H, J, K \leq F_k$:

- La relation de "facteur libre" est transitive i.e.

$H \lessdot J \lessdot K \implies H \lessdot K$.

Algorithme de Puder

Proposition

Soient $H, J, K \leq F_k$:

- La relation de "facteur libre" est transitive i.e.
$H \lessdot J \lessdot K \Longrightarrow H \lessdot K$.

- S'il existe un plongement $\eta : \Gamma_X(H) \longrightarrow \Gamma_X(J)$ alors $H \lessdot J$.

Algorithme de Puder

Proposition

Soient $H, J, K \leq F_k$:

- La relation de "facteur libre" est transitive i.e.
$H \lessdot J \lessdot K \Longrightarrow H \lessdot K$.

- S'il existe un plongement $\eta : \Gamma_X(H) \longrightarrow \Gamma_X(J)$ alors $H \lessdot J$.

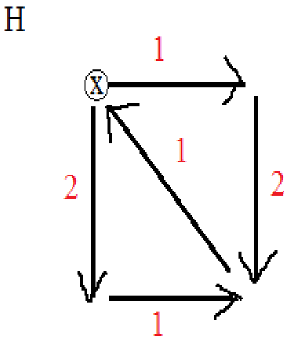
- Si $H \lessdot J$ alors H est facteur libre de tout sous-groupe M tel que $H \leq M \leq J$.

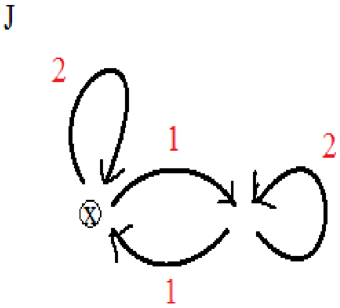
Algorithme de Puder

Proposition

Soient $H, J, K \leq F_k$:
- La relation de "facteur libre" est transitive i.e.
$H \lessdot J \lessdot K \Longrightarrow H \lessdot K$.
- S'il existe un plongement $\eta : \Gamma_X(H) \longrightarrow \Gamma_X(J)$ alors $H \lessdot J$.
- Si $H \lessdot J$ alors H est facteur libre de tout sous-groupe M tel que $H \leq M \leq J$.

Est-ce que le groupe $H =< x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1}, x_2 x_1^2 >$ est facteur libre du groupe $J =< x_2, x_1 x_2 x_1, x_1^2 >$?


H
X
1
1
2
2
1


J
2
1
2
X
1

1ère étape de l'algorithme

On construit les core graphs associés

1ère étape de l'algorithme

On construit les core graphs associés

2ème étape de l'algorithme

On construit le morphisme

1ère étape de l'algorithme

On construit les core graphs associés

2ème étape de l'algorithme

On construit le morphisme
On regarde l'image de Γ par notre morphisme : ici, c'est directement Δ

1ère étape de l'algorithme

On construit les core graphs associés

2ème étape de l'algorithme

On construit le morphisme
On regarde l'image de Γ par notre morphisme : ici, c'est directement Δ

3ème étape de l'algorithme

On calcule les rangs et la distance :
$rk(H) = 1 - 4 + 5 = 2$
$rk(J) = 1 - 2 + 4 = 3$
$\varrho(H, J) = 1$ (en regardant directement sur le graphe de tous les quotients immédiaux)

Préservation de la mesure

Définition

$w \in F_k$ **préserve la mesure** *si pour tout groupe fini* G *et un homomorphisme pris aléatoirement* α_G *on a* $\alpha_G(w)$ *distribué uniformément dans* G.

Préservation de la mesure

Définition

*$w \in F_k$ **préserve la mesure** si pour tout groupe fini G et un homomorphisme pris aléatoirement α_G on a $\alpha_G(w)$ distribué uniformément dans G.*
*H **préserve la mesure** si la restriction de α_G à H est uniformément distribuée dans $Hom(H, G)$.*

Préservation de la mesure

Définition

$w \in F_k$ **préserve la mesure** *si pour tout groupe fini* G *et un homomorphisme pris aléatoirement* α_G *on a* $\alpha_G(w)$ *distribué uniformément dans* G.
H **préserve la mesure** *si la restriction de* α_G *à* H *est uniformément distribuée dans* $Hom(H, G)$.

Théorème

1) $H \lessdot F_k \iff H$ *préserve la mesure*

Préservation de la mesure

Définition

$w \in F_k$ **préserve la mesure** *si pour tout groupe fini* G *et un homomorphisme pris aléatoirement* α_G *on a* $\alpha_G(w)$ *distribué uniformément dans* G.
H **préserve la mesure** *si la restriction de* α_G *à* H *est uniformément distribuée dans* $Hom(H, G)$.

Théorème

1) $H \lessdot F_k \iff H$ *préserve la mesure*

2) w *primitif* $\iff$ w *préserve la mesure*

idée de la démonstration

Fonctions

$\pi(H) = min\{rk(J)|H \leq J \leq F_k$ tel que H ne soit pas un facteur libre de $J\}$

idée de la démonstration

Fonctions

$\pi(H) = min\{rk(J) | H \leq J \leq F_k$ tel que H ne soit pas un facteur libre de $J\}$

$\Phi_H(n) = Prob[\forall w \in H, \alpha_n(w)(1) = 1] - \frac{1}{n^{rk(H)}}$

idée de la démonstration

Fonctions

$\pi(H) = min\{rk(J) | H \leq J \leq F_k$ tel que H ne soit pas un facteur libre de $J\}$

$\Phi_H(n) = Prob[\forall w \in H, \alpha_n(w)(1) = 1] - \frac{1}{n^{rk(H)}}$
et
$\Phi(H)$ le plus petit entier i tel que $a_i(H)$ soit non-nul si la fonction Φ_H n'est pas la fonction nulle, ∞ sinon

idée de la démonstration

Fonctions

$\pi(H) = min\{rk(J) | H \leq J \leq F_k$ tel que H ne soit pas un facteur libre de $J\}$

$\Phi_H(n) = Prob[\forall w \in H, \alpha_n(w)(1) = 1] - \frac{1}{n^{rk(H)}}$
et
$\Phi(H)$ le plus petit entier i tel que $a_i(H)$ soit non-nul si la fonction Φ_H n'est pas la fonction nulle, ∞ sinon

On montre que π et Φ coincident partout dans le cas où
$rk(H) \geq k - 1$
donc quand l'un vaut ∞ l'autre aussi.

Conclusion

relation core graphs, quotients immédiaux, facteurs libres

Conclusion

relation core graphs, quotients immédiaux, facteurs libres

primitif/facteur libre $\Longleftrightarrow$ préserve la mesure