

Introduction

Soit λ la fractalité de la suite. On pose les fonctions suivantes :

$$\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}, n \rightarrow \lambda \cdot n$$

et

$$\psi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}, n \rightarrow n + E\left(\frac{n-1}{\lambda-1}\right) = E\left(\frac{n \cdot \lambda - 1}{\lambda - 1}\right)$$

où $E(x)$ désigne la partie entière de x .

On dit alors que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est fractale de fractalité λ si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_{\varphi(n)} = u_{\psi(n)}$$

cas $\lambda = 2$:

Par définition, on a

$$\varphi : n \rightarrow 2 \cdot n$$

et

$$\psi : n \rightarrow 2 \cdot n - 1$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_1 = u_{2 \cdot 1} = u_{2 \cdot 1 - 1} = u_2 = u_{2 \cdot 2} = u_{2 \cdot 2 - 1} = \dots = u_n$$

(démonstration par récurrence immédiate)

On voit donc que si $\lambda = 2$, la suite est constante donc u_1

$= u_{\lambda-1}$ et la suite est bien périodique.

Théorème

Toute suite fractale (u_n) de fractalité λ , non-constante, telle que $u_1 \neq u_{\lambda-1}$ est non-périodique.

Démonstration

• On se propose de montrer tout d'abord que

(u_n) périodique à partir d'un certain rang $\Leftrightarrow (u_n)$ périodique

Preuve :

L'implication de droite à gauche est évidente.

Supposons (u_n) périodique à partir d'un certain rang. Notons $T > 0$ cette période. Par définition on a :

$$\exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N, \forall k \in \mathbb{N}, u_n = u_{n+kT}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme φ est strictement croissante à valeurs dans \mathbb{N} , il existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $n' = \varphi^\alpha(n) \geq N$

et alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_{\varphi^\alpha(n)} = u_{n'} = u_{n'+kT}$$

En particulier, si on prend $k = \lambda^\alpha \cdot k'$ avec $k' \in \mathbb{N}$, on obtient

$$u_n = u_{\varphi^\alpha(n) + \varphi^\alpha(k' \cdot T)} = u_{\varphi^\alpha(n + k' \cdot T)} = u_{n + k' \cdot T}$$

(par linéarité de φ)

On a ainsi prouvé l'implication réciproque.

• Montrons que la suite n'est pas périodique.
La démonstration se fait en plusieurs étapes.

$$1. \forall u \in \{1; \dots; T-1\}, \forall k \in \mathbb{N}, T \nmid u \cdot \lambda^k$$

En effet,

$$T \mid u \cdot \lambda^k \Rightarrow \exists k' \in \mathbb{N}, T \cdot k' = u \cdot \lambda^k$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+u} = u_{\varphi^k(n+u)} = u_{\lambda^k \cdot n + \lambda^k \cdot u} = u_{\lambda^k \cdot n + k' \cdot T} = u_{\lambda^k \cdot n} = u_n$$

Et donc on en déduit que (u_n) est périodique de période $u < T$,
ce qui est absurde puisqu'on a supposé T la période.
Par conséquent, l'assertion est bien prouvée.

2. On regarde le reste de la division euclidienne de λ^k et de λ^{k+1} par T :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists a \in \mathbb{N}, \lambda^k = a \cdot T + r_k \quad \text{où } 0 < r_k < T - 1$$

et donc en multipliant par λ , on obtient

$$\lambda^{k+1} = \lambda \cdot a \cdot T + \lambda \cdot r_k$$

Mais d'autre part, on a aussi

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists a' \in \mathbb{N}, \lambda^{k+1} = a' \cdot T + r_{k+1} \quad \text{où } 0 < r_{k+1} < T - 1$$

Donc en faisant la différence on obtient que

$$0 = (a' - a \cdot \lambda) \cdot T + r_{k+1} - r_k$$

$$\Rightarrow r_{k+1} \equiv \lambda \cdot r_k \quad [T]$$

Pour tout k , le reste prend sa valeur dans $\{1; \dots; T - 1\}$. La suite des restes prend, de fait, un nombre fini de valeurs une infinité de fois.

$$\text{Donc } \exists K \in \mathbb{N}^*, \exists k \in \mathbb{N}, r_k = r_{k+K}$$

$$\text{Par conséquent, } r_{k+K} = r_k \equiv \lambda^K \cdot r_k \quad [T]$$

$$\Rightarrow r_k (\lambda^K - 1) \equiv 0 \quad [T]$$

3. On montre alors que $\forall k \in \mathbb{N}^*, r_k \wedge T = 1$

En effet, si $p \in \mathbb{N}^*$, $p \leq r_k < T$,

$$\begin{cases} p | T \\ p | r_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists u' \leq T, p \cdot u' = T \\ \exists u \leq r_k, p \cdot u = r_k \end{cases}$$

Et d'autre part, en reprenant la formule de la division euclidienne,

$$\begin{aligned} \lambda^k = a \cdot T + r_k &\Rightarrow u' \cdot \lambda^k = u' \cdot a \cdot T + u' \cdot r_k \Rightarrow u' \cdot \lambda^k = u' \cdot a \cdot T + u' \cdot p \cdot u \Rightarrow u' \cdot \lambda^k = (u' \cdot a \\ &+ u) \cdot T \\ &\Rightarrow T \mid u' \cdot \lambda^k \end{aligned}$$

Donc d'après ce qui précède, on a nécessairement $u' = T$, ce qui implique que $p = 1$

D'où

$$r_k \wedge T = 1$$

i.e.

$$T \mid \lambda^K - 1$$

4. Et par l'absurde on voit que $\lambda^K - 1$ ne peut pas être un multiple de la période.

On se propose de voir que $(\lambda^K - 1)$ multiple de la période implique que $u_1 = u_{\lambda-1}$

Par contraposée on aura donc $u_1 \neq u_{\lambda-1} \Rightarrow (u_n)$ non périodique.

Supposons donc $u_1 \neq u_{\lambda-1}$

Pour ce faire, on va appliquer successivement à l'indice de $u_{\lambda-1}$ les fonctions suivantes :

$$\psi^2 \circ \varphi^{K-1}$$

puis on retranche le multiple de la période $\lambda^K - 1$

et on applique $(\varphi^{-1})^{K-2} \circ \psi^{-1} \circ \varphi^{-1}$ pour aboutir au résultat.

Remarquons que $K > 1$ car $K=1 \Rightarrow T \mid \lambda - 1$

et alors

$$u_1 = u_{\psi^{\lambda-2} \circ \varphi(1)} = u_{\psi^{\lambda-2}(\lambda)} = u_{2 \cdot \lambda - 2} = u_{\lambda - 1}$$

ce qui est contraire à notre hypothèse.

Par conséquent,

$$\varphi^{K-1}(\lambda - 1) = \lambda^K - \lambda^{K-1}$$

$$\psi(\lambda^K - \lambda^{K-1}) = E\left(\frac{\lambda^{K+1} - \lambda^K - 1}{\lambda - 1}\right) = E\left(\lambda^K - \frac{1}{\lambda - 1}\right) = \lambda^K - 1$$

$$\begin{aligned} \psi(\lambda^K - 1) &= E\left(\frac{\lambda^{K+1} - \lambda - 1}{\lambda - 1}\right) = E\left(\frac{\lambda^{K+1} - \lambda}{\lambda - 1} - \frac{1}{\lambda - 1}\right) = \frac{\lambda^{K+1} - \lambda}{\lambda - 1} - 1 \\ &= \frac{\lambda^{K+1} - 2 \cdot \lambda + 1}{\lambda - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^{K+1} - 2 \cdot \lambda + 1}{\lambda - 1} - (\lambda^K - 1) &= \frac{\lambda^{K+1} - 2 \cdot \lambda + 1}{\lambda - 1} - \lambda^K + 1 = \frac{\lambda^K - \lambda}{\lambda - 1} \\ &= \frac{\lambda \cdot (\lambda^{K-1} - 1)}{\lambda - 1} \end{aligned}$$

$$\varphi^{-1}\left(\frac{\lambda \cdot (\lambda^{K-1} - 1)}{\lambda - 1}\right) = \frac{\lambda^{K-1} - 1}{\lambda - 1}$$

$$\psi^{-1}\left(\frac{\lambda^{K-1} - 1}{\lambda - 1}\right) = \lambda^{K-2}$$

$$(\varphi^{-1})^{K-2}(\lambda^{K-2}) = 1$$

On est parti de $\lambda - 1$, auquel on a appliqué des fonctions ne modifiant pas la valeur de u

Par conséquent, on obtient que

$$u_1 = u_{\lambda - 1}$$

et la suite n'est pas périodique, ce qui achève cette partie de la démonstration.

Notons qu'on s'est servi de l'égalité suivante :

$$\psi \circ \varphi^k(\lambda - 1) = \lambda^{k+1} - 1 \quad \text{qui est immédiate.}$$

En particulier, dans le cas de la suite du lézard comme $u_1 \neq u_2$ (sinon la suite est constante) on a la suite du lézard qui est bien non-périodique.

Lambert Rosique.

contact : lambertrosique@hotmail.com

Si vous avez des questions ou des commentaires, n'hésitez pas à m'en faire part par mail. Je mettrai dès que possible la démonstration sur arxiv.