Suites de Billard

Rosique Lambert
et
Stevenot Adrien
Master 1 Mathématiques, 2010-2011

18 mai 2011

Sous la direction de Pierre Arnoux

Table des matières

Introduction

Le 19 juin 1939 paraissait pour la première fois le terme de "mot sturmien" dans une publication : Symbolic Dynamics II. Sturmian Trajectories. de Marston Morse et Gustav A. Hedlund. Ils introduisirent ce terme en l'honneur du mathématicien Jacques Charles François Sturm, par référence à son travail sur des caractérisations des trajectoires des géodésiques sur le tore plat, même si l'étude de ces suites remonte à Jean Bernouilli (XIXème siècle).

On commencera donc par considérer une table de billard carrée sans trou et on s'attachera aux propriétés de la trajectoire d'une boule de billard, assimilée à un point matériel, en l'absence de frottement. Dans quel cas est-elle dense dans le billard ? Et périodique ? Quels sont les paramètres à prendre en compte pour décrire la trajectoire ?

Ensuite, on s'intéressera à une autre approche géométrique de ces suites : l'approximation d'une droite par une courbe continue affine par morceaux, puis on fera le lien avec les mots de Christoffel, inventés plusieurs décennies avant les mots sturmiens pourtant très proches. On montrera aussi que les suites de billards peuvent être engendrées par les rotations d'angle α.

L'essor de l'informatique a, enfin, permis de donner une nouvelle définition à ces suites : elles sont les suites apériodiques de complexité minimale, ou encore les suites apériodiques équilibrées, résultat important que l'on démontrera après avoir étudié les propriétés des suites équilibrées.

Chapitre 1

Suites de Billard

1.1 Billard

1.1.1 Approche directe

colonne 1	colonne 2	colonne 3
1.1	1.2	1.3
2.1	2.2	2.3

Proposition 1. *Soit S un mot infini et n un entier au moins égal à 1. Notons c le nombre de facteurs conservatifs de longueur n de S. On a :*

Si S admet un facteur de longueur $n+c$ dont tous les facteurs de longueur n sont conservatifs, alors S est ultimement périodique.

Démonstration. Soit $u = u_1 u_2 u_3 ... u_n u_{n+1} u_{n+2} ... u_{n+c}$ un tel facteur.

Posons □

L'objet de cette partie est d'étudier les suites de rebonds d'une boule sur un billard carré et d'en dégager des propriétés.

Considérons une table de billard rectangulaire sans trous et dépourvue de tous frottements. On y dépose une boule, assimilée à un point, qu'on lance dans une direction quelconque et on code la trajectoire de celle-ci de la manière suivante :
- On note 0 lorsque la boule rencontre l'un côté vertical ;
- On note 1 s'il s'agit d'un côté horizontal.

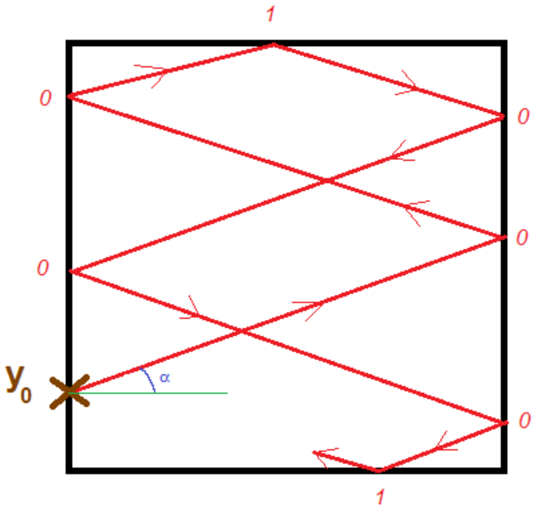
Dans la mesure où il n'y a aucun frottements, on obtient ainsi une suite infinie codant cette trajectoire.

Notons que l'on prendra les lois usuelles de la réflexion de Descartes pour déterminer cette suite de 0 et de 1 et que l'on ne tiendra pas compte de la vitesse car elle n'influe pas sur la trajectoire.

Remarquons aussi qu'un problème se pose si jamais la trajectoire de la boule venait à rencontrer un coin du billard. Pour simplifier, on peut supposer que ce cas n'arrive jamais (en fait, cet événement est de probabilité nulle et est facile à traiter isolément), bien qu'il suffirait, par exemple, de coder cet événement par 01 (ce qui correspondrait en fait à deux rebonds successifs d'abord vertical puis horizontal).

D'autre part, l'ensemble des suites ainsi fabriquées ne dépend pas, a priori, des dimensions du billard considéré. On pourra donc facilement se ramener au cas où le billard est carré, de côté de longueur 1, sans perdre en généralité. A une symétrie près, on peut même prendre la pente de départ de la boule dans $]0,1]$ (1 correspondant à la pente de la diagonale), intervalle ouvert car on isole le cas où la boule part dans un angle. De plus, on peut prendre comme position de départ, pour la boule, une certaine ordonnée à l'origine $y_0 \in [0;1[$.

Concrètement, la trajectoire représentée ci-dessous code le mot 0010001.



Définition 1. *On appelera suite de billard toute suite infinie de 0 et de 1 telle qu'il*

existe un trajet sur le billard codé par cette suite.

Remarque 1. *Une telle suite dépendra donc de sa pente de départ* α *et de son ordonnée de départ* y_0.

1.1.2 Discrétisation du problème

A l'aide des nombreuses symétries du carré, nous allons maintenant établir un moyen plus commode de lire la suite du billard.

Pour cela, déplions le billard carré plusieurs fois de manière à quadriller le plan (muni d'un repère orthonormé) avec des carrés de côté 1.

Les sommets du carré de référence, qui correspond à notre billard initial, seront placés aux points de coordonnés $(0,0),(1,0),(1,1)$ et $(0,1)$. Enfin, prolongeons la trajectoire lorsqu'elle rencontre un coté du carré : au lieu de la réfléchir sur ce côté, on la continue dans la même direction sur le carré symétrique par rapport à ce côté, de sorte que la trajectoire suive une ligne droite.

Nous obtenons ainsi une fonction affine dont le coefficient directeur correspond à la pente de départ α de la boule et dont l'ordonnée à l'origine est y_0.

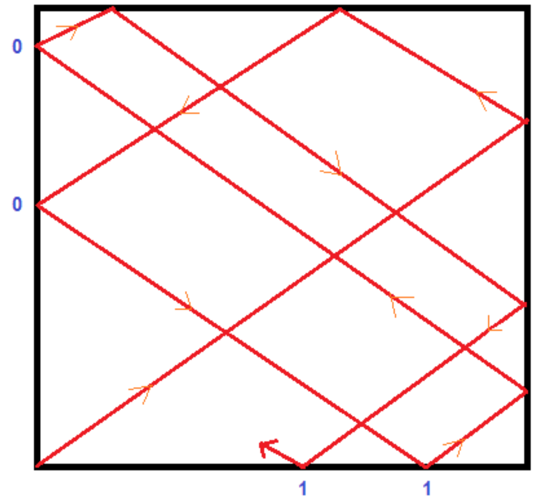
Remarque 2. *Un carré sera dit unitaire si ses côtés ont pour longueur 1.*
On assimilera la position d'un carré unitaire aux coordonnées de son sommet inférieur gauche.

Par construction, tous les carrés traversés par la droite correspondent à un morceau de la trajectoire de la boule dans le billard d'origine.

Le segment qui se situe dans le n-ième carré (de coordonnées (i,j)) coïncide avec le trajet de la boule entre le $(n-1)$-ième et le n-ième rebond, avec la condition de prendre le symétrique du segment par rapport à un côté vertical si i est impair et par rapport à un coté horizontal si j est impair (puis de translater jusqu'à l'origine bien sûr).

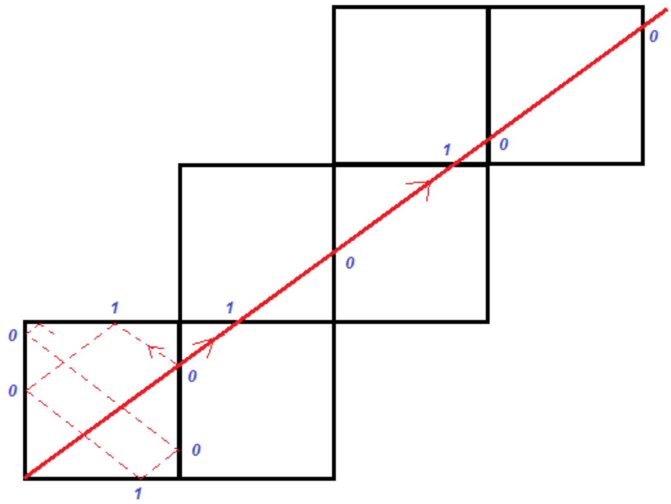
Il suffit ensuite de coder l'intersection entre la droite et un coté vertical par un 0, et l'intersection entre la droite et un coté horizontal, par un 1 pour reconstruire la suite du billard.

Voici un exemple de trajectoire d'une boule dans un billard :



Trajectoire codant le mot 010100101...

et de sa trajectoire "dépliée" :



Il existe quelques cas triviaux que l'on peut analyser dès maintenant sans avoir recours à des méthodes plus avancées :

- Lorsque la pente est nulle, la suite du billard est la suite constante égale à 0.
- Lorsque la pente est égale à 1 et $y_0 = 0$ la trajectoire passe par les sommets. Par convention, on obtient que la trajectoire est codée par 0101010101... ou 1010101010...

Nous pouvons dès à présent élucider une question pas si triviale : à quelle condition la trajectoire de la boule est périodique ? grâce au théorème suivant.

Théorème 1. *La trajectoire de la boule est (ultimement) périodique si et seulement si la pente α est rationnelle.*

Exemple 1. *Par exemple pour $\alpha = \frac{1}{2}$ la trajectoire de la boule vaut 00100100100... ou 0100100100... ou 100100100... suivant le point de départ de la boule.*

Définition 2. *Soit x un réel positif. On note $\{x\}$ la partie fractionnaire de x c'est-à-dire le nombre vérifiant l'équation $x = [x] + \{x\}$ où $[x]$ désigne la partie entière par défaut de x.*

Lemme 1. *Soit y_0 l'ordonnée à l'origine de la droite de pente α et y une ordonnée positive d'un point de la droite d'antécédent un entier x non-nul. On a l'équivalence :*

$$\exists y \textit{ vérifiant l'énoncé et tel que } \{y\} = y_0 \Longleftrightarrow \alpha \in \mathbb{Q}$$

Démonstration. Si $\{y\} = y_0$ alors $\alpha = \frac{y-y_0}{x-0}$.

Mais $\{y - y_0\} = 0$, donc $(y - y_0) \in \mathbb{N}$ ce qui montre que α est rationnel (comme quotient de deux entiers).

Réciproquement,

Si $\alpha \in \mathbb{Q}$, il existe $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $pgcd(p, q) = 1$ et $\alpha = \frac{p}{q}$. Or pour tout x positif d'image par la droite un certain y, $\alpha = \frac{y-y_0}{x} \Longrightarrow y = y_0 + x \times \alpha$. On prend donc, par exemple, $x = q$ pour obtenir l'existence d'un y de même partie fractionnaire que y_0 et d'antécédent un entier. $\square$

Exemple 2. *Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on a la courbe qui passe par les points $(0, y_0)$, $(2, 1 + y_0)$, $(4, 2 + y_0)$, etc...*

Démonstration. On démontre à présent le théorème, en commençant par la condition nécessaire.

Si $\alpha \in \mathbb{Q}$, il existe un x et un y vérifiant les propriétés du lemme. Par conséquent, si on note ω_{α,y_0} la suite de billard de pente α et d'ordonnée à l'origine y_0, $\omega_{\alpha,y_0} = \omega_{\alpha,y}$ puisqu'on a juste fait une translation du plan pour passer d'un système à l'autre. De fait, le mot codé entre y_0 et y noté u se répète indéfiniment ce qui montre que la trajectoire est périodique (car $\omega_{\alpha,y_0} = u\omega_{\alpha,y}$).

Réciproquement,

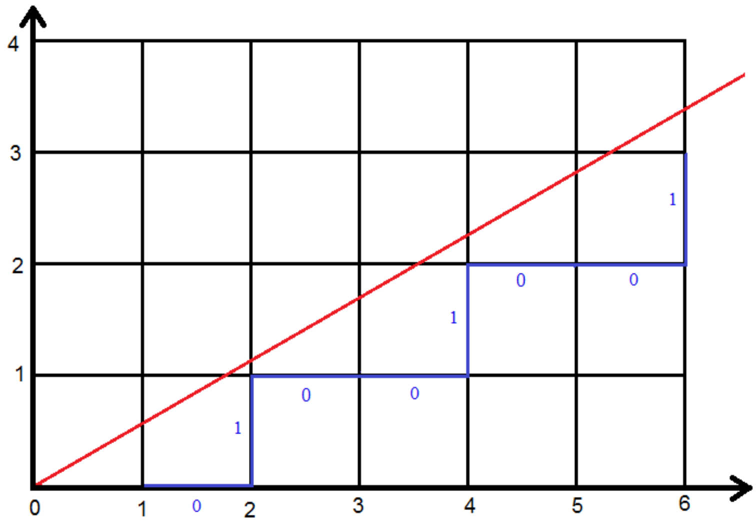
Soit α irrationnel. Si la trajectoire était périodique, la suite serait évidemment périodique, et alors il existerait un point x entier tel que y_0 et $y = \alpha \times x + y_0$ aient la même partie fractionnaire (autrement dit, la trajectoire rebondirait deux fois au même point, ce qui est logique vu qu'elle est périodique avec la même orientation), ce qui est impossible d'après le lemme. $\square$

1.2 Mots mécaniques

Plaçons nous dans le même cas que pour les mots de billard, c'est-à-dire dans le quart de plan supérieur droit d'un repère orthonormé. De la même manière, donnons-nous une droite de pente α et d'ordonnée à l'origine y_0.

Nous allons construire une suite de point $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de coordonnées entières, tels que P_0 est le point de coordonnées $(1,0)$ et que si P_n a pour coordonnés (i,j), alors P_{n+1} à pour coordonnées $(i,j+1)$ si ce point est en dessous ou sur la courbe, et $(i+1,j)$ sinon. On pourrait également donner de façon plus analytique les coordonnées de ces points, mais cela n'est pas nécessaire pour l'utilisation que nous en ferons.

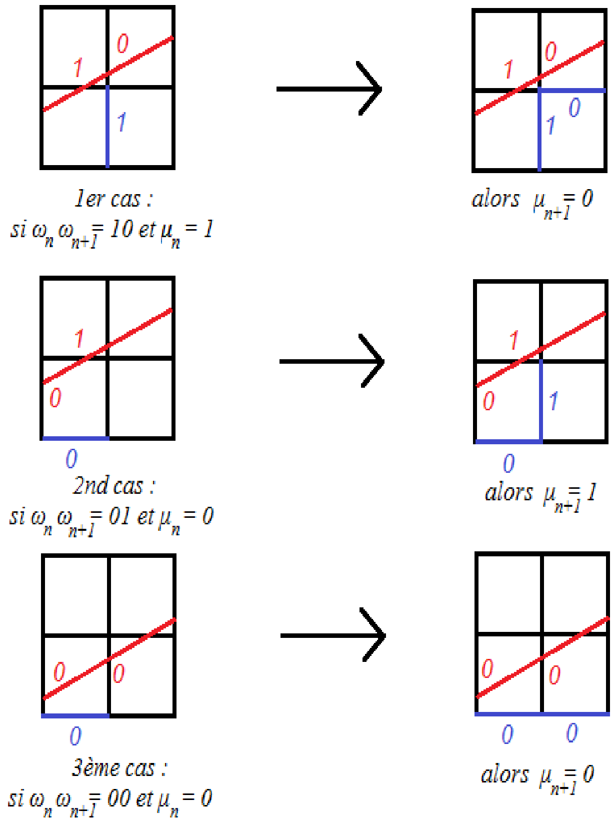
Définition 3. *On appellera suite mécanique une suite dans* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *telle que son n-ième terme soit 0 si* P_{n+1} *et* P_n *ont la même ordonnée, 1 sinon.*



Le mot mécanique 01001001...

Théorème 2. *Une suite infinie est une suite de billard (notée (ω_n)) si et seulement si elle est une suite mécanique (notée (μ_n)). De plus, elles sont engendrées par la même droite de pente α et d'ordonnée à l'origine y_0.*

Démonstration. On peut prouver ce théorème par récurrence à l'aide d'un raisonnement géométrique. Il suffit en fait d'étudier l'évolution des termes des suites de billard parallèlement à celle des suites mécaniques. Si le premier terme de la suite de billard est 0, alors, pour éviter l'intersection entre leur courbe respective, le premier terme de la suite mécaniques ne peut être que 0. Par un raisonnement similaire, on montre que si le premier terme de la suite de billard est 1, alors celui de la suite mécanique est également 1. On peut donc supposer que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ les n-ième termes d'une suite mécanique et d'une suite de billard sont égaux. On peut ensuite s'appuyer sur le dessin qui suit pour établir la propriété au rang $n+1$ suivant la valeur ω_n de la suite de billard :



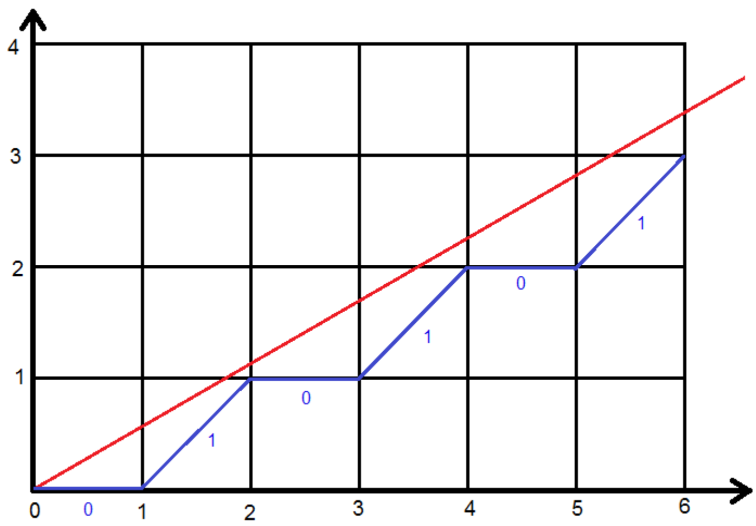
□

1.3 Mot de Christoffel

On va à présent regarder les mots de Christoffel, du mathématicien et physicien du XIXième siècle, Elwin Bruno Christoffel, qui sont liés aux mots de billard.

La méthode pour construire ses mots revient à approximer une fonction affine de pente $a \in [0, 1[$ par des points de coordonnées entières situés en-dessous d'elle, puis de joindre les points consécutifs par des segments. On fabrique ainsi une fonction avec une pente tantôt nulle, tantôt égale à 1 sur chaque carré unitaire.

Voici un exemple :



Remarque 3. *Nous pouvons également travailler sur les droites de pente supérieur à 1 en approximant la courbe par au dessus, et ayant cette fois-ci des pentes tantôt égales à 1, tantôt égales à $+\infty$, mais par symétrie nous n'étudierons pas ce cas là.*

Etablissons à présent un lien entre les mots de Christoffel et les mots de billard. Nous allons d'abord recourir à une approche géométrique pour montrer que les définitions des mots mécaniques et des mots de Christoffel sont en fait très similaire. Nous exprimerons analytiquement, ensuite, la nature de ce lien.

On peut, en fait, écrire la définition des mots de Christoffel de la même manière que pour les mots mécaniques : en construisant à nouveau une suite de point $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de coordonnées entières, tels que Q_0 est le point de coordonnées $(0,0)$ et si Q_n a pour coordonnés (i,j), alors Q_{n+1} à pour coordonnées $(i+1,j+1)$ si ce point est en dessous ou sur la courbe, et $(i+1,j)$ sinon.

Définition 4. *On appellera suite de Christoffel une suite dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ telle que sa n-ième lettre soit 0 si P_{n+1} et P_n ont la même ordonnée, 1 sinon.*

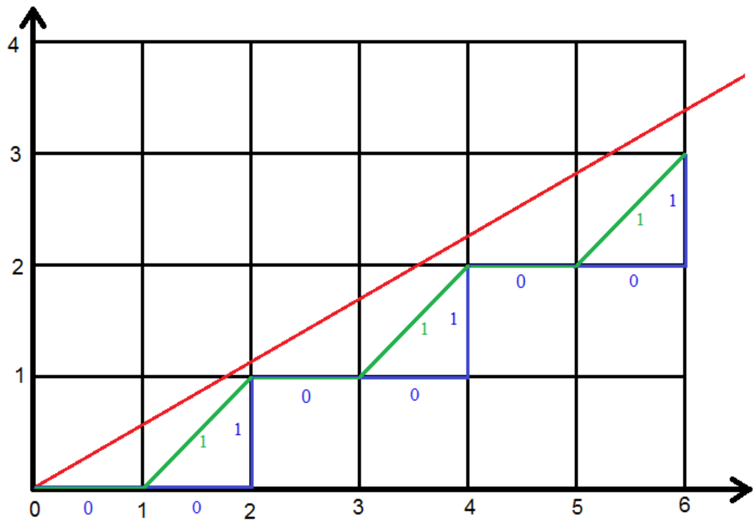
En fait, on va expliquer le lien étroit entre ces deux catégories de mot.

On peut voir que les deux types de mots correspondent à l'approximation d'une droite par des segments de pente 0 ou $+\infty$ pour les mots mécaniques, et de pente 0 ou 1 pour les mots de Christoffel.

Si l'on suppose la pente de la droite codée comprise dans $[0, 1[$, on peut rapidement se rendre compte que, pour un mot mécanique, il ne peut y avoir deux occurrences de la lettre 1 consécutives, et donc que chaque 1 sera suivi et précédé d'un 0. Comme on connait toujours la lettre qui suit ou qui précède un 1, on peut, par exemple, modifier les mots mécaniques en remplaçant 01 par 1 (on pourrait également remplacer 10 par 1 sans perdre d'information).

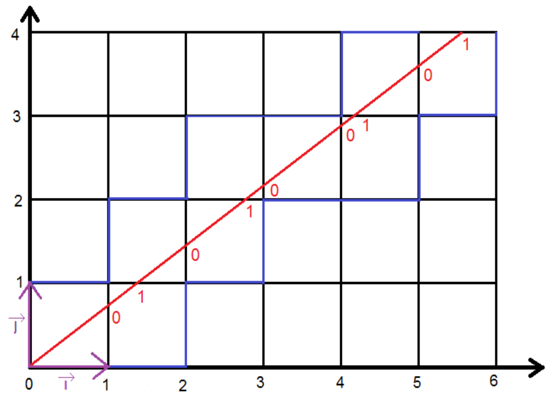
En fait, il s'agit ici de la transformation d'un mot de billard en un mot de Christoffel. En effet, géométriquement, cela revient à remplacer chaque couple de segments consécutifs de pente, respectivement, 0 et $+\infty$ en un segment de pente 1.

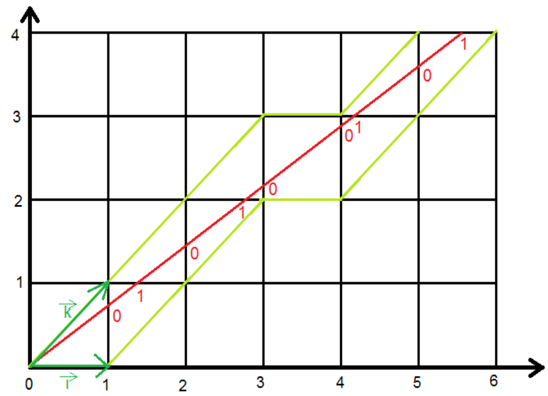
Le schéma suivant montre un tel codage appliqué à une droite.

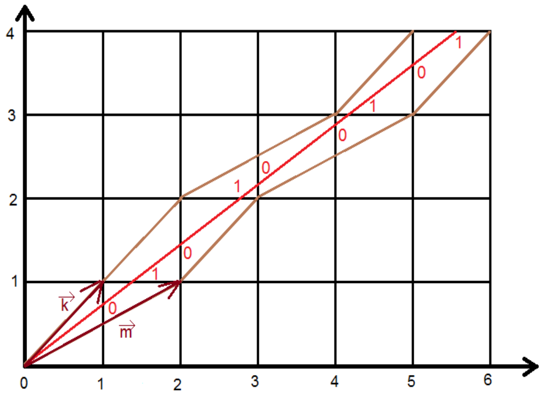


En bleu le mot mécanique initial
En vert le mot de Christoffel associé

Nous avons en fait réalisé un changement de base pour approximer inférieurement la droite. En effet, comme nous savions que la pente de la droite était comprise dans l'intervalle $[0, 1[$, nous en avons déduit une règle sur l'occurrence des lettres qui nous a permis d'améliorer la base de départ (formée par les vecteurs unitaires $(\vec{i}, \vec{j})$). Réciproquement, plus nous avons de termes d'une suite mécanique, mieux nous pouvons réaliser un encadrement de la droite qu'elle définit en réitérant ce procédé "d'affinement de la base". En effet, on peut trouver deux courbes de fonctions continues affines par morceaux engendrées par les vecteurs de la nouvelle base telles que chacune converge vers la droite discrétisée. Pour se fixer les idées, on peut par exemple choisir la suite qui commence par 010100101 :







Proposition 2. *Notons $B(\alpha, y_0)$ un mot de billard, avec α sa pente et y_0 son ordonnée à l'origine, ainsi que C(a,b) un mot de Christoffel de pente a et d'ordonnée à l'origine b. On a alors la relation suivante pour passer des mots de Christoffel à ceux de billard : $C(a,b) = B(\frac{a}{1-a}, \frac{b-a}{b-1})$ ou encore $B(a,b) = C(\frac{a}{a+1}, \frac{a+b}{a+1})$ (que l'on montrera pour la première coordonnée (i.e. la pente) plus loin).*

Démonstration. Nous allons, pour simplifier la démonstration, partir cette fois-ci d'un mot de Christoffel qu'on transformera en mot mécanique. Pour cela, on peut considérer le morphisme φ suivant :

$$\varphi : \begin{cases} 0 \longrightarrow 0 \\ 1 \longrightarrow 01 \end{cases}$$

Nous allons montrer qu'il s'agit bien d'un morphisme bijectif de l'espace des suites de billard dans l'espace des suites de billard. Pour montrer l'injectivité, il faut se fixer deux mots u et v distincts : $\exists i \in \mathbb{N}$, $u_i \neq v_i$. Notons k la première position où $u_i \neq v_i$, et w le mot $u_0 ... u_{k-1}$. Sans restriction de généralité, supposons que $u_k = 0$ et $v_k = 1$. Comme φ est un morphisme, on a : $\varphi(u) = \varphi(w)\varphi(0)\varphi(u_{k+1})...$ et $\varphi(v) = \varphi(w)\varphi(1)\varphi(v_{k+1})...$

Soit k' la position de $\varphi(u_k) = \varphi(v_k)$ dans $\varphi(u)$. Comme $\varphi(0) = 0$, $\varphi(u_{k+1}) = 0$ ou 01 et $\varphi(1) = 01$, à la position k', $\varphi(u)$ possède le mot 00 alors que $\varphi(v)$ possède lui le mot 01. Ainsi, ces deux images sont bien différentes, d'où l'injectivité. La surjectivité assez évidente car la pente qui engendre les mots mécaniques étudiés est comprise dans l'intervalle $[0, 1[$, ce qui signifie qu'il y a plus de 0 que de 1. Ainsi, on peut toujours trouver le mot de Christoffel correspondant. Donc φ est bien un isomorphisme. □

Soit $\alpha \in [0,1]$ et $y_0 \in [0,1]$ deux nombres réels. On peut définir deux suites infinies définies par :
$u_{\alpha,y_0}(n) = [(n+1)\alpha + y_0] - [n\alpha + y_0]$
$v_{\alpha,y_0}(n) = \lceil (n+1)\alpha + y_0 \rceil - \lceil n\alpha + y_0 \rceil$

qui sont chacune à valeur dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Les courbes discrétisées par ces suites représentent respectivement les courbes des mots de Christoffel inférieurs et supérieurs encadrant la droite D de pente α et d'ordonnée à l'origine y_0. Or, ces suites possèdent les mêmes termes que la suite de Christoffel définit par la droite D sauf en un nombre fini de point (ceux où D passe par un point de coordonnée entière). Mais si la droite si α est irrationnel, alors d'après le lemme 1, il existe un unique n tel que $u_{\alpha,y_0} \neq v_{\alpha,y_0}$. Donc la suite engendrée par la droite D est soit u_{α,y_0} soit v_{α,y_0}. On en déduit donc

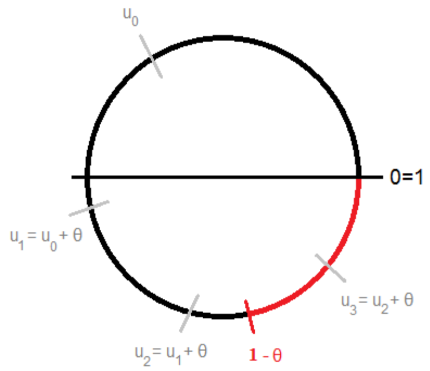
Proposition 3. *Soit α et y_0 dans l'intervalle $[0,1]$ et α irrationnel. Alors soit $u_{\alpha,y_0}(n) = [(n+1)\alpha + y_0] - [n\alpha + y_0]$ soit $v_{\alpha,y_0}(n) = \lceil (n+1)\alpha + y_0 \rceil - \lceil n\alpha + y_0 \rceil$ est une suite de Christoffel.*

Démonstration. Voir juste avant. □

1.4 Rotations d'angle α

Soit C le cercle. On le munit de la mesure qui compte le nombre de tours (le point de référence sera noté 0).

Une autre méthode de construction existe pour ces mots mécaniques, faisant appelle cette fois-ci à des rotations d'angle α dans un cercle C. Soient l'angle $\theta \in [0,1[$ et un point de départ $u_0 \in [0,1[$. Soit (u_n) la suite définie par : $u_{n+1} \equiv u_n + \theta \mod 1$



On a ainsi une suite de points sur le cercle. A chaque point, associons v_n définie par :

$$v_n = \begin{cases} 0 \text{ si } u_n \in]0, 1-\theta[\\ 1 \text{ si } u_n \in]1-\theta, 1[\end{cases}$$

On définit ensuite un mot qui est la concaténation des valeurs de v_n, c'est un mot mécanique $\mu_{\theta,u_0} = v_0 v_1 v_2 \ldots$ On qualifie cette suite de suite de rotation engendrée par θ.

Théorème 3. *Une suite est de rotation si et seulement si c'est une suite de Christoffel.*

Démonstration. Montrons que une suite de rotation v_{α,y_0} coïncide avec une suite mécanique μ_{α,y_O} que l'on supposera sans restriction de généralité de la forme $\mu_{\alpha,y_0}(n)$ $= [(n+1)\alpha + y_0] - [n\alpha + y_0]$.

Soit α l'angle de la rotation et y_0 le point de départ. On a $f_\alpha(y_0) = \alpha + y_0$ i.e. pour tout entier n, $f_\alpha^n(y_0) = \alpha n + y_0$ et $v_n = 0$ si $f_\alpha^n \in]0, 1-\alpha[$ et $v_n = 1$ si $f_\alpha^n \in]1-\alpha, 1[$. On a deux cas :

- Si $f_\alpha^n =]0, 1-\alpha[$,
alors $0 \leq \alpha n + \beta < 1 - \alpha$ donc $[\alpha n + \beta] = 0$, et $\alpha \leq \alpha(n+1) + \beta < 1$ donc $[\alpha(n+1) + \beta] = 0$. D'où $[\alpha(n+1) + \beta] - [\alpha n + \beta] = 0$.
- Si $f_\alpha^n =]1-\alpha, 1[$,
alors $1 - \alpha < \alpha n + \beta < 1$ donc $[\alpha n + \beta] = 0$, et $1 < \alpha(n+1) + \beta < 1 + \alpha$ donc

$[\alpha(n+1)+\beta] = 1$. D'où $[\alpha(n+1)+\beta] - [\alpha n+\beta] = 1$.

Réciproquement, on part de la suite mécanique $\mu_{\alpha,y_0}(n) = [(n+1)\alpha+y_0]-[n\alpha+y_0]$ avec α la pente de sa droite et y_0 son ordonnée à l'origine. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mu_{\alpha,y_0}(n)$ $= 1 \Rightarrow [(n+1)\alpha + y_0] = [n\alpha + y_0] + 1$
Or $n\alpha + \alpha + \beta \geq [n\alpha + \alpha + \beta] = [n\alpha + \beta] + 1$
D'où $n\alpha + \beta \geq [n\alpha + \beta] + 1 + \alpha$
Puis $\{n\alpha + \beta\} = n\alpha + \beta - [n\alpha + \beta] \geq 1 - \alpha$
Donc, en prend cette inégalité modulo 1 pour se ramener au cercle : $1-\alpha \leq n\alpha+\beta <$ 1 ce qui implique $v_n = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mu_{\alpha,y_0}(n) = 0 \Rightarrow [(n+1)\alpha + y_0] = [n\alpha + y_0]$
On a $n\alpha + \alpha + \beta < [n\alpha + \beta + 1$
Donc $\{n\alpha - \beta\} < 1 - \alpha$
Enfin modulo 1 pour se ramener au cercle : $0 \leq n\alpha + \beta < 1 - \alpha$ ce qui implique v_n $= 0$.

Donc on a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \mu_n$.

$\square$

Chapitre 2

Suites sturmiennes

2.1 Théorie du langage

On se donne un ensemble $\mathcal{A} = \{0, 1\}$, appelé alphabet dont les éléments sont appelés des lettres.

Une suite $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ finie composée de n lettres est un mot (fini de longueur n notée $|u|$), et le mot vide (de longueur 0) est noté ε.
Un mot infini est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{A}$.
L'ensemble des mots finis sur l'alphabet $\mathcal{A}$ est noté $\mathcal{A}^*$.

2.1.1 Définitions

Définition 5. *On peut définir un* ***facteur*** *d'un mot u : il s'agit d'un mot fini constitué de lettres consécutives de u. L'ensemble des facteurs de u sera noté F_u.*

Définition 6. *La* ***hauteur*** *d'un mot u de longueur n est $h(u) = \sum_{i=1}^{n} u_i$. Remarquons qu'il s'agit du nombre de 1 dans le mot u.*

Définition 7. *On appelle* ***pente*** *de u le nombre $\pi(u) := h(u)/|u|$.*

Définition 8. *Une suite $S : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ est dite* ***périodique*** *si $\exists T \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+T} = u_n$. On dira qu'elle est ultimement périodique si elle est périodique à partir* *d'un certain rang, i.e. il existe une suite u périodique et un mot fini p tel que $S = puuuu...$*

Définition 9. *Elle est dite **équilibré** si, pour tout n, pour tous facteurs $u, v \in F_S(n)$ on a $|h(u) - h(v)| \leq 1$.*

Définition 10. *On appelle **complexité** d'un mot u l'application qui à chaque $n \in \mathbb{N}$ associe le nombre de facteurs de u de longueur n différents. On notera $P_n(u)$ ce nombre.*

Exemple 3. *On considère la suite sturmienne de Fibonacci (i.e. la suite de pente $\frac{1}{\varphi^2}$ où φ est le nombre d'or) : $F = 0100101001001010010 10...$*

Un facteur de F est 10010010 ;

La hauteur de ce facteur (qui est un mot) est 3 ;

La pente de ce mot vaut $\frac{3}{8}$;

La suite est équilibrée (ceci découle de théorèmes donnés plus loin dans l'article). On peut vérifier que le facteur exhibé est aussi équilibré :

- les facteurs de longueur 1 de ce facteur sont 0 et 1 (leur hauteur diffère de 1)

- ceux de longueur 2 sont 10, 01 (qui ont la même hauteur) et 00 (de hauteur différente des autres de 1)

- ceux de longueur 3 sont 100, 001, 010 (qui ont la même hauteur)

etc...

Et la complexité de ce facteur est la suite $(1, 2, 3, 3, ...)$ tandis que celle de la suite F est $(1, 2, 3, 4, 5, ...)$.

2.2 Propriétés

Théorème 4. *Une suite S est équilibrée si et seulement si pour tous facteurs u, v non vides, on a $|\pi(u) - \pi(v)| < 1/|u| + 1/|v|$.*

Démonstration. Si l'inégalité est vérifiée, alors pour tous facteurs u, v de longueur n on a $|h(u) - h(v)| = n|\pi(u) - \pi(v)| < n(1/n + 1/n) = 2$, or $h(u) - h(v)$ est un entier donc $|h(u) - h(v)| \leq 1$.

Réciproquement, supposons S équilibrée. On montre l'inégalité par récurrence sur $|u| + |v|$. Si $|u| = |v|$, comme S est équilibrée $|\pi(u) - \pi(v)| = |h(u) - h(v)|/|u|$

$\leq 1/|u| < 1/|u| + 1/|v|$. Ceci règle en particulier le cas initial $|u| + |v| = 2$ pour $|u| = |v| = 1$.

Pour l'étape de récurrence, considérons deux facteurs u, v de longueurs distinctes. Considérons le cas $|u| > |v|$, l'autre étant identique. On peut alors décomposer u en $u'w$ avec $|u'| = |v|$, ce qui donne

$$\pi(u) - \pi(v) = \frac{|v|\pi(u') + |w|\pi(w)}{|u|} - \pi(v) = \frac{|v|}{|u|}\big(\pi(u') - \pi(v)\big) + \frac{|w|}{|u|}\big(\pi(w) - \pi(v)\big)$$

Par la remarque précédente et l'hypothèse de récurrence on a

$$|\pi(u') - \pi(v)| \leq \frac{1}{|v|} \text{ et } |\pi(w) - \pi(v)| < \frac{1}{|w|} + \frac{1}{|v|}$$

d'où on déduit

$$|\pi(u) - \pi(v)| < \frac{|v|}{|u|} \cdot \frac{1}{|v|} + \frac{|w|}{|u|}\left(\frac{1}{|w|} + \frac{1}{|v|}\right) = \left(\frac{|v|}{|u|} + \frac{|w|}{|u|}\right)\frac{1}{|v|} + \frac{|w|}{|u|} \cdot \frac{1}{|w|} = \frac{1}{|u|} + \frac{1}{|v|}.$$

□

Corollaire 1. *Si S est équilibrée et si S_n est un préfixe de S (de longueur n), Alors $\pi(S_n)$ converge lorsque n tend vers l'infini.*

On appelle sa limite la "pente de S".

Démonstration. Ceci est une conséquence directe du théorème précédent.

En effet, peu importe la suite de préfixes considérée, $(\pi(S_n))_n$ est une suite de Cauchy : Soit $\epsilon > 0$, et N tel que $N > 2\epsilon$ Pour tout $p, q > N$, on a

$|\pi(S_p) - \pi(S_q)| < \frac{1}{|S_p|} + \frac{1}{|S_q|} = \frac{1}{|p|} + \frac{1}{|q|} < \frac{2}{N} < \epsilon$

La suite est de Cauchy dans un espace métrique donc elle converge et sa limite est unique.

□

Proposition 4. *Soit C une suite de Christoffel et S une suite de billard. On a alors :* $1/\pi(S) = 1/\pi(C) + 1$

Démonstration. Soit (u_n) une suite de facteurs de S de longueur n. Alors

$\pi(S) = \lim\limits_{n\to+\infty} \pi(\varphi(u_n))$ et $\pi(\varphi(u_n)) = \frac{h(\varphi(u_n))}{|\varphi(u)|} = \frac{h(u_n)}{|u_n|+h(u_n)}$

où φ est le morphisme donné précédemment, faisant le lien entre mots de Christoffel et mots de billard.

D'où en passant à la limite pour l'inverse :
$\pi(S)^{-1} = \pi(C)^{-1} + 1$
i.e.
$\pi(S) = \frac{\pi(C)}{\pi(C)+1}$ $\square$

Proposition 5. *Si S est équilibré de pente α alors pour tout facteur u non-vide de S on a :*

$$|\pi(u) - \alpha| \leq \frac{1}{|u|}$$

De plus, l'une des deux inégalités suivante est vérifiée pour l'ensemble des facteurs de S :

$$\alpha|u| - 1 < h(u) \leq \alpha|u| + 1 \qquad \textit{(1)}$$

ou

$$\alpha|u| - 1 \leq h(u) < \alpha|u| + 1 \qquad \textit{(2)}$$

Remarque 4. *Si α est irrationnel, les inégalités sont strictes (le cas d'égalité ne se présente jamais).*

Les inégalités (1) et (2) sont plus précises que la première inégalité de la proposition.

En outre, ceci nous donne la vitesse de convergence en pente d'une suite de facteurs vers α.

Démonstration. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de préfixes de S de longueur n, et u un facteur non-vide de S. D'après le théorème ci-dessus, on a :

$$|\pi(u) - \pi(v_n)| < \frac{1}{|u|} + \frac{1}{|v_n|}$$

Soit $\epsilon > 0$.

La convergence de la pente des préfixes permet d'écrire : il existe un certain $n_0 \in \mathbb{N}*$ tel que pour tout $n > n_0$, $|\pi(v_n) - \alpha| < \epsilon$.

D'où en utilisant l'inégalité triangulaire : $|\pi(u) - \alpha| < |\pi(u) - \pi(v_n)| + |\pi(v_n) - \pi(\alpha)| < \frac{1}{|u|} + \frac{1}{n} + \epsilon$

Et on obtient ainsi la première inégalité annoncée en faisant tendre n vers l'infini et ϵ vers 0 (on passe à la borne inférieure pour ϵ).

A l'aide de l'inégalité $|\pi(u) - \alpha| \leq \frac{1}{|u|}$, on en déduit que

$$||u| \times (\frac{h(u)}{|u|} - \alpha)| < 1$$

et donc

$$\alpha|u| - 1 \leq h(u) \leq \alpha|u| + 1$$

Il suffit ainsi de remarquer que les deux égalités ne peuvent être vérifiées par deux mots d'un même ensemble de facteurs. En effet, sinon, il existerait deux facteurs a et b tels que :

$\alpha|a| - 1 = h(a)$ et $\alpha|b| + 1 = h(b)$

mais alors $|\pi(a) - \pi(b)| = 1/|a| + 1/|b|$, ce qui est en contradiction avec le théorème. □

Proposition 6. *Soit S un mot infini équilibré de pente α. Alors :*
α est rationnel si et seulement si S est ultimement periodique

Démonstration. Supposons S ultimement périodique. Alors S s'écrit sous la forme $xyyyy...$ où x et y sont des mots finis non-vides. De fait, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\pi(xy^n) = \frac{h(x) + nh(y)}{|x| + n|y|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi(y) \in \mathbb{Q}$$

ce qui montre que la pente est rationnelle car $\pi(xy^n)$ converge aussi vers $\pi(S)$.

Réciproquement, si α est rationnel, il existe p, q des entiers premiers entre eux, avec q non-nul, tel que $\alpha = \frac{p}{q}$. Supposons que l'inégalité (1) vue dans la proposition précédente soit vérifiée (s'il s'agit de (2) on peut raisonner de manière similaire). On considère un facteur de S de longueur q. Ainsi, $p - 1 < h(u) \leq p + 1$ donc $h(u)$ prend comme valeur soit p soit $p + 1$ car il est entier.

On montre qu'il ne peut pas y avoir de mot entre deux facteurs de longueur q et de hauteur $p + 1$:

Si ce n'était pas le cas, on pourrait exhiber un facteur $w = uxv$ de S tel que u et v sont de longueur q et de hauteur $p + 1$ avec, en plus, d'après (1),

$h(w) = h(u) + h(x) + h(v) = 2p + 2 + h(x) \leq \frac{p}{q} \times (2q + |x|) + 1 = 2p + 1 + \alpha|x|$

ce qui donne enfin $h(x) \leq \alpha|x| - 1$, en contradiction directe avec (1).

Par conséquent, S peut être factorisé sous la forme $S = ty$, de telle sorte que tous les facteurs de longueur q de y ont la même hauteur. Soit f un facteur de longueur $q + 1$ de y. Il existe $\epsilon_0, \epsilon_1 \in \{0; 1\}$ et un mot m tel que $f = \epsilon_0 m \epsilon_1$. Les mots $\epsilon_0 m$ et $m\epsilon_1$ sont de longueur q. D'après ce qu'il précède, ils ont la même hauteur, d'où

$\epsilon_0 = \epsilon_1$. Ceci étant vrai pour tout facteur de longueur $q+1$, on en conclut que S est ultimement périodique de période q. □

Proposition 7. *Soit u un mot infini. On a équivalence entre :*

1) Il existe n$\in \mathbb{N}$ tel que $P_n(u) = P_{n+1}(u)$

2) u est ultimement périodique

Démonstration. Supposons 1) vraie. Comme tout facteur de longueur n est préfixe d'un facteur de longueur n+1, on a ainsi $P_n(u)$ facteurs distincts de longueur n+1. En particulier, tout facteur de u de longueur n se prolonge de manière unique en un facteur de longueur n+1 (car sinon on aurait par exemple $P_{n+1}(u) = P_n(u) + 1$). De manière plus formelle, pour tout $v_1 v_2 ... v_n$ facteur de u, il existe un unique v_{n+1} tel que $v_1 v_2 ... v_{n+1}$ soit aussi facteur de u. On peut alors continuer : comme $v_2 ... v_{n+1}$ est un facteur de u de longueur n, il existe un unique v_{n+2} tel que $v_2 ... v_{n+2}$ soit facteur de u, puis un unique v_{n+3}, etc...

Ainsi, il apparait que u est ultimement périodique puisque comme u est infini, il y a au moins un facteur de longueur n qui apparait deux fois dans u et d'après ce qui précède il n'y a qu'une façon de passer de l'un à l'autre. Donc une fois qu'on connait un tel chemin (c'est-à-dire le mot entre ces deux facteurs), on est certain qu'il réapparaitra après le deuxième facteur puis sera suivi du facteur en question et ainsi de suite.

Réciproquement, si on suppose 2) vraie, alors comme u est ultimement périodique, il existe v et p deux mots tels que $u = vpppp...$ Pour $N \geq |v| + |p|$, on a au plus les $|v|$ premiers facteurs puis les $|p|$ facteurs constitués de répétitions de p pris à partir de n'importe quelle lettre.

D'où $P_N(u) \leq |v| + |p|$ et comme la complexité est une suite croissante majorée d'entiers, elle converge et atteint sa limite. Ainsi, il existe bien n tel que 1).

□

Corollaire 2. *Soit u un mot infini. S'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P_n(u) \leq n$ alors u est ultimement périodique.*

Autrement dit,u est apériodique si $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(u) \geq n+1$.

Démonstration. Elle tient de la proposition précédente.

En effet, s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P_n(u) \leq n$, alors comme la suite des complexité est une suite d'entiers croissante, il existe $k \leq n$ tel que $P_k(u) = P_{k+1}(u)$ et donc u est ultimement périodique (si n est différent de 1).

Si n = 1, alors $P_1(u) = 1$ et u ne contient qu'une lettre : c'est la suite constante égale à cette lettre. □

Proposition 8. *Soit u un mot infini. Si u est équilibré alors* $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(u) \leq n+1$.

Démonstration. On démontre la proposition par récurrence sur n :

- Pour n = 0, c'est évident. Pour n = 1, vu que u est formé de deux lettres, c'est aussi vrai.
- Supposons la propriété vraie pour un certain entier non-nul n. On montre alors qu'il n'y a pas plus de n+2 facteurs de longueur n+1 dans u.

En effet, tous les facteurs de longueur n sont préfixes de ceux de longueur n+1. On commence par montrer qu'il y a un unique facteur v de longueur n qui est biprolongeable à droite (autrement dit tel que $v0$ et $v1$ soient facteurs de u). Raisonnons par l'absurde :

Soient v, w deux facteurs distincts de u, de longueur n, biprolongeables à droite. Si $h(v)$ est différent de $h(w)$ alors, par exemple (l'autre cas étant symétrique) $h(v) = h(w) + 1$ (comme u est équilibré l'écart ne peut valoir que 1). Mais alors $h(v1) = h(v)+1 = h(w0)+2$ ce qui est impossible. Donc nécessairement $h(v) = h(w)$.

Comme v et w sont distincts, on peut en extraire deux suffixes de même longueur mais de hauteur différente (on peut, par exemple, lire v et w de droite à gauche et prendre comme suffixe à partir d'où ils diffèrent). On applique alors le raisonnement ci-dessus à ces deux suffixes et on aboutit à une contradiction.

Ainsi, il ne peut y avoir deux facteurs biprolongeables à droite si u est équilibré. Et par conséquent, il y a au plus (n+1 + 1) facteurs de longueur n+1, ce qui achève la démonstration. □

Définition 11. *Soit w un mot fini. On dit que w est un palindrome si c'est un nombre symétrique i.e. qu'on lise les lettres de w de gauche à droite ou de droite à gauche, le mot w ne change pas.*

Bien entendu, le sens conventionnel de lecture est de lire de gauche à droite, aussi pour dire qu'on lit le mot x de droite à gauche on notera $\tilde{x}$.

Si a est une lettre (i.e. 0 ou 1), on notera a^{-1} *pour désigner l'autre lettre différente de a.*

Proposition 9. *Soit u un mot infini. u est non-équilibré si et seulement si il existe w un palindrome tel que 0w0 et 1w1 sont des facteurs de u.*

Démonstration. La condition suffisante est évidente puisque la hauteur de 0w0 et 1w1 diffère de 2.

Inversément, si u n'est pas équilibré, on peut trouver deux facteurs a et b de u tel quel leur hauteur diffère de 2 et qu'ils soient de longueur minimale $n \in \mathbb{N}$*. Autrement dit, a commence et finit par la même lettre, mettons 0, et b commence et finit donc par 1 (sinon ils ne seraient pas minimaux, puisqu'on aurait a = 0x1 et b = 1y0 donc forcément la hauteur de x et de y diffèrent de 2). Ainsi, il existe un mot w tel que a = 0w0 et b = 1w1.

Montrons à présent que w est un palindrome en raisonnant par l'absurde : si ce n'était pas le cas, on pourrait trouver un préfixe x de w et une lettre y tel que xy est préfixe de w mais y$\tilde{\text{x}}$ n'est pas suffixe de w (y est la "première lettre" qui fait que w n'est pas un palindrome). De fait, un préfixe de a est 0xy et un suffixe de b est $y^{-1}$$\tilde{\text{x}}$1

Si y = 0, on a 0x0 et 1$\tilde{\text{x}}$1 facteurs de u de longueur inférieure strictement à n, ce qui contredit la minimalité.

Si y = 1, a = 0x1p et b = q1$\tilde{\text{x}}$0, avec du coup la hauteur de p et de q qui diffère de 2. Ceci contredit de nouveau la minimalité de a et b. Par conséquent, w est un palindrome. □

Définition 12. *Un mot fini est dit* ***conservatif*** *s'il n'est pas biprolongeable à droite. Autrement dit, ce mot est toujours suivi de la même lettre.*

Proposition 10. *Soit S un mot infini et n un entier au moins égal à 1.*

Notons c le nombre de facteurs conservatifs de longueur n de S. On a :

Si S admet un facteur de longueur n+c dont tous les facteurs de longueur n sont conservatifs, alors S est ultimement périodique.

Démonstration. Soit $u = u_1u_2u_3...u_nu_{n+1}u_{n+2}...u_{n+c}$ un tel facteur.

On peut remarquer que u contient $c+1$ facteurs de longueur n :
$p_1 = u_1u_2...u_n$
$p_2 = u_2u_3...u_{n+1}$
...
$p_c = u_cu_{c+1}...u_{c+n-1}$
et $v = u_{c+1}u_{c+2}...u_{c+n}$

Comme S admet exactement c facteurs conservatifs distincts (de longueur n) et qu'ils sont tous dans u, on en déduit qu'il existe un $i \in \{1, ..., c\}$ tel que $v = p_i$.

- Si $i = c$, alors $v = p_c$ est suivi de la lettre u_{c+n} (par conservativité de p_c). On obtient donc de nouveau le mot v car le suffixe de p_cu_{c+n} de longueur n est bien

v. En réappliquant le raisonnement, on constate que la suite est bien ultimement périodique puisqu'à partir de là, on n'a plus que $u_{c+n}u_{c+n}u_{c+n}$....

- Si $i \neq c$, p_i se prolonge de manière unique en un facteur de longueur $n+1$: $p_iu_{i+n} = u_ip_{i+1}$ puisque le mot $u_i...u_{i+n-1}$ est nécessairement suivi de u_{i+n}, car sinon il serait biprolongeable à droite. On continue ce raisonnement sur p_{i+1} jusqu'à p_c : on constate qu'on a une boucle dans S qui est infinie (on n'en sort jamais puisqu'après p_c on a à nouveau u_{n+c} qui redonne le mot p_i, etc...). Ainsi, la suite est ultimement périodique. □

2.3 Suite Sturmienne

Définition 13. *Un mot infini u est dit sturmien si pour tout* $n \in \mathbb{N}, P_n(u) = n+1$. *Autrement dit, il contient exactement* $n+1$ *facteurs différents de longueur* n.

Théorème 5. *Soit S un mot infini. On a :*

S est sturmien si et seulement si S est équilibré apériodique.

Démonstration. Soit S un mot infini, équilibré apériodique.

D'après le corollaire 2, comme S est apériodique, $P_n(S) \geq n+1$.

De plus, en vertu de la proposition 8, S est équilibré si et seulement si $P_n(S) \leq n+1$.

D'où $P_n(S) = n+1$ et donc S est sturmien.

Réciproquement, on montre que si S est sturmien non-équilibré alors S est ultimement périodique.

En effet, comme S n'est pas équilibré, il existe un palindrome w tel que 0w0 et 1w1 sont facteurs de S (proposition 9). Par conséquent, w est spécial à droite (car w0 et w1 sont facteurs de S).

Posons $n = |w| + 1$.

D'après ce qui précède, il existe un unique facteur biprolongeable à droite de longueur n, et c'est nécessairement 0w ou 1w (car sinon w ne peut pas être biprolongeable à droite). Supposons dans la suite qu'il s'agit de 0w (le raisonnement pour le cas 1w étant strictement le même) :

On en déduit directement que S ne peut pas contenir le mot 1w0 puisqu'il contient déjà 1w1 (on a unicité du mot biprolongeable à droite à longueur fixée).

On se propose d'utiliser la proposition 10 pour montrer qu'alors S est ultimement périodique. Soit donc le mot u = 1w1v où v est un mot de longueur n-1 tel que u soit un facteur de S, et montrons que le seul facteur biprolongeable à droite de longueur n (c'est-à-dire 0w) n'est pas facteur de u, par l'absurde.

Si 0w apparait dans u, alors comme $|u| = 2n$, on peut trouver des mots s, t, y et z tels que :

$$\begin{cases} w = s0t \\ w = t1y \\ v = yz \end{cases}$$

ce qu'on comprend très bien avec le tableau suivant.

			u			
1		w		1	v	
		0		w		
1	s	0	t	1	y	z

Mais comme w est un palindrome, on peut le lire de gauche à droite ou inversement sans qu'il ne change. Ceci se traduit par le fait que w s'écrit s0t et $\tilde{t}0\tilde{s}$ où $\tilde{t}$ (resp. $\tilde{s}$) est le mot t (resp. s) lu de droite à gauche. Comme t et $\tilde{t}$ ont la même longueur, et

$$\begin{cases} w = t1y \\ w = \tilde{t}0\tilde{s} \end{cases}$$

on obtient bien une contradiction. D'où u ne contient pas 0w. Par conséquent, tous ses facteurs de longueur n sont conservatifs (c'est-à-dire non-biprolongeables à droite). Cependant, il y a exactement n facteurs de longueur n conservatifs et |u| = 2n d'où, d'après la proposition 10, S est ultimement périodique.

On a ainsi démontré que si S est sturmien et S est non-équilibré alors S est ultimement périodique, ce qui est absurde car S est sturmien (donc apériodique). D'où S est équilibré, ce qui achève la démonstration.

□

Remarque 5. *Grâce à ce théorème, on récupère pour les suites sturmiennes, qui sont les suites de complexité minimale, la plupart des propriétés des suites équilibrées (il faut qu'elles soient apériodiques aussi).*

2.4 Lien avec les suites de rotation

Définition 14. *On appelle orbite d'un point l'ensemble de ses itérées par une fonction.*

Une suite S est dite de type 0 si elle comporte plus de 0 que de 1 i.e. de pente inférieure à 1.

Dans cette section, nous allons établir l'équivalence non trivial entre les suites sturmiennes, c'est-à-dire de complexité $n+1$, et les suites de rotation, définie comme les suites codées par l'orbite d'une rotation d'angle α irrationnel. Dans un premier temps, nous allons donner une preuve de la réciproque, celle-ci étant bien plus simple à montrer.

Théorème 6. *Toute suite codée par l'orbite (d'un point) d'une rotation d'angle irrationnel est une suite sturmienne.*

Démonstration. Ayant déjà établit que toute suite sturmienne correspond à une suite équilibré non-périodique, nous allons établir cette propriété pour la suite u définie par $u_n = [(n+1)\alpha + \beta] - [n\alpha + \beta]$ qui est la formule générale d'une suite de rotation (comme nous l'avons vu dans la partie I).

On compte ainsi le nombre d'occurrence de la lettre 1 dans un mot de longueur n. Par exemple, il suffit de compter le nombre de 1 entre u_{k+n-1} et u_k. Ainsi, on a par définition de la suite u, $[(k+n)\alpha + \beta] - [k\alpha + \beta]$ occurrence de la lettre 1. Mais il est facile de voir que ce nombre ne peut prendre que deux valeurs en fonction de la longueur n du mot : dans un premier cas, ce nombre vaut $[n\alpha]$ si $[(n+k)\alpha + \beta] = (n+k)\alpha + \beta$, sinon, il vaut $\lceil n\alpha \rceil$. Comme la hauteur de cette suite ne peut prendre au maximum que deux valeurs lorsque n est fixé, la suite est équilibrée, donc sturmienne. $\square$

Théorème 7. *Toute suite sturmienne est une suite codée par l'orbite d'une rotation d'angle irrationnel.*

Démonstration. Rappelons, dans un premier temps, que σ_0 est l'application qui à un mot associe un nouveau mot obtenu en remplaçant les 0 par 0 et les 1 par 10. De même, σ_1 est l'application qui à un mot associe un nouveau mot en obtenu en remplaçant les 0 par 01 et les 1 par 1. Le choix de σ_0 ou de σ_1 dépend en fait de la pente (donc de la forme) de la suite : si la suite contient plus de 0 que de 1, ce qui équivaut à posséder une pente $\alpha \in [0, 1[$ et donc ne contient pas deux 1 consécutifs en raison de sa complexité, σ_0 (resp. σ_1) est évidement injective, et surjective à condition de restreindre son image aux suites pour lesquelles le facteur 11 (resp. 00) est interdit. De plus, nous avons la proposition suivante : $\square$

Proposition 11. *Soit S une suite à valeur dans $0, 1$, si S est sturmienne de type 0 et commençant par un 1 (resp. possédant plus de 1 et commençant par un 0) alors $\sigma_0^{-1}(S)$ (resp. $\sigma_1^{-1}(S)$) est sturmienne.*

Démonstration. Par symétrie des applications σ_0 et σ_1, on peut sans restriction de généralité étudier les suites de type 0 (c'est-à-dire comportant plus de 0 que de 1). Supposons S' non équilibré tel que $\sigma_0(S') = S$, alors en conséquence de la proposition 8, il existe un mot a tel que $0a0$ et $1a1$ sont facteurs de S'. Ainsi, le mot $\sigma_0(1a1) = 10\sigma_0(a)10$ est facteur de S, et comme $0a0$ n'est pas au début, soit $00a0$ soit $10a0$ est facteur de S'. Dans le premier cas, $\sigma_0(00a0) = 00\sigma_0(a)0$ est facteur de S, dans le second, $\sigma_0(10a0) = 100\sigma_0(a)0$ est facteur de S. Ainsi, on a toujours $00\sigma_0(a)0$ et $10\sigma_0(a)1$ comme facteur de S, donc S n'est pas équilibrée. □

Démonstration. (suite de la démonstration du théorème)

Ainsi, on peut effectivement trouver un unique mot v vérifiant l'égalité car on sait que chaque 1 sera suivi de la lettre 0.

Si cette suite v était sturmienne, nous pourrions réitérer ce processus jusqu'à n'avoir plus de 0 consécutif, et dans ce cas il apparaitrait forcément des 1 consécutifs car u est sturmienne donc non périodique. Ainsi, sachant que chaque 0 sera suivi d'un 1, on se retrouverait avec une suite que l'on peut cette fois-ci réduire en une suite w telle que $v = \sigma_1(w)$.

Mais ce n'est pas si simple : en effet, il est peu fréquent que la suite v soit sturmienne, il y a en effet un problème avec le premier terme, à cause du fait que l'on s'est restreint à étudier les suites infinies et non les suites bi-infinies. En conséquence, nous ne pouvons normalement pas savoir si la première lettre de la suite u résulte soit du codage de la lettre 0 soit de celui de la lettre 1. Ainsi, le choix du décodage de la première lettre de la suite est déterminant pour maintenir le caractère sturmien de la suite v, mais nous pouvons reporté ce problème en effectuant des opérations décalage D qui à une suite associe la suite privée de son premier terme.

Il est aussi intéressant de se demander le nombre de décalages nécessaires pour maintenir le caractère sturmien. En fait, de manière général, il existe une suite sturmien qui peut être encodé de cette façon tel qu'aucun décalage ne soit nécessaire. C'est le cas dans lequel on se place généralement lorsque l'on étudie une suite sturmienne u, et on décale ainsi la suite u autant de fois que nécessaire. Géométriquement, dans le plan, cela correspond à commencer à écrire la suite sturmienne à partir d'un point à coordonnées entières. Comme la pente α d'une suite sturmienne est irrationnelle, il est facile de montrer que ce phénomène n'arrive qu'une unique fois dans le plan, d'après le lemme 1.

Néanmoins, notre problème est différent : la suite sturmienne u est fixé, ainsi, on ne peut pas immédiatement savoir où se situe ce point de coordonnés entières. Pire, s'étant restreint aux suites infinies et non bi-infinies, il est également possible que ce point possède des coordonnées négatives auquel cas ce point ne pourra jamais être atteint. C'est pourquoi l'étude du nombre de décalages est complexes lorsque u est fixé. La seule caractérisation que l'on peut trouver pour le nombre de décalage à une étape fixée est qu'il est inférieur ou égal aux nombres d'applications σ_i, pour $i \in 0, 1$ nécessaires pour passer la suite sturmienne d'un type à l'autre, et la preuve découle immédiatement de la proposition ci-dessus.

En réitérant ce procédé, on a au final une suite u écrit comme le recodage infini d'une suite sturmienne v avec l'existence de 2 suites a et b à valeur dans $\mathbb{N}$, avec $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \geq b_n$, tel que $...D^{b_{2n}}\sigma_1^{a_{2n}}D^{b_{2n-1}}\sigma_0^{a_{2n-1}}...D^{b_1}\sigma_1^{a_1}D^{b_0}\sigma_0^{a_0}(X)$, avec $X = 0ou1$.

En fait, la suite a correspond au développement en fraction continue de la pente α (qu'on ne montrera pas dans ce TER), et la suite b est liée au point de départ mais il est très difficile de le prouver. Il ne reste plus qu'à utiliser les suites a et b pour construire la pente α et le point de départ β. Ainsi, la suite sturmienne u est une suite de rotation.

$\square$

Théorème 8. *Soit S une suite. En résumé de tout ce qui précède, on a montré que*

$$\begin{aligned} S \text{ est une suite de Christoffel} &\iff S \text{ est une suite de billard} \\ &\iff S \text{ est une suite mécanique} \\ &\iff S \text{ est une suite de rotation} \end{aligned}$$

Dans le cas où S est apériodique, on obtient de plus :

$$\begin{aligned} S \text{ est une suite de rotation apériodique} &\iff S \text{ est sturmien} \\ &\iff S \text{ est équilibré apériodique} \end{aligned}$$

Conclusion

Partis d'un problème très concret - la trajectoire d'une boule dans un carré, on a pu établir un lien avec une approximation de droites par une courbe continue affine par morceaux. De plus, on a exhibé un procédé très simple de génération des suites sturmiennes : en itérant une rotation sur un cercle.

Cependant, ce problème n'est pas que de nature géométrique. En effet, on a remarqué que ces suites du billard sont aussi les suites de complexité minimale non-périodiques, et du coup elles sont équilibrés. Autrement dit, même si elles sont en apparence simple (faible complexité), on ne peut pas toujours "prédire" le terme suivant de la suite à partir de ses prédécesseurs.

On concluera en disant que cette partie des mathématiques est très riche - ce qui justifie les recherches récentes sur la généralisation aux polygônes quelconques, et qu'elle trouve de nombreuses applications, principalement dans la modélisation des gaz (en physique), l'approximation d'une droite (en informatique), le développement en fraction continue d'un nombre, mais aussi, pour les échanges d'intervalles et, comme l'ont annoncé M. Morse et G.A. Hedlund, "pour caractériser la distribution des zéros des solutions des équations différentielles de la forme $y'' + f(x) \times y = 0$ où f est une fonction périodique".

Remerciements

On remercie Pierre Guillon pour ses explications, Emmanuel Beffara pour nous avoir enseigné le LaTeX et proposé une approche plus visuelle des suites de Billard, Julien Cassaigne pour son aide inestimable, et, enfin, Pierre Arnoux, notre chargé de TER, pour sa patience, ses conseils et pour ce sujet tellement intéressant.

Bibliographie

[1] *M. LOTHAIRE, Algebraic Combinatorics on Words, Cambridge University Press, 18 april 2002.*

[2] *M. GUERY, Billard rectangulaire, fractions continues et mots sturmiens*

[3] *E. BEFFARA, Systèmes dynamiques discrets, Billard et suites sturmiennes*

[4] *M. MORSE et G.A. HEDLUND, Symbolic dynamics II : Sturmian trajectories, Amer. J. Math. 62 (1940)*

[5] *T. MONTEIL, Illumination dans les billards polygonaux et dynamique symbolique (2005)*

[6] *N. PYTHEAS FOGG, Substitutions in Dynamics, Arithmetics, and Combinatorics (2002)*